De wiskunde en het programmeren van Sudoku’s

Evert van de Vrie
Open Universiteit Nederland

	8		5				2	
1				7		9		6
	3				4			
		5						3
	7						8	
2						1		
			1				4	
6		2		9				5
	4				3		9	

Onderwerpen

- Korte historie
- Oplosmethoden
- Wiskunde en sudoku’s
- Programmeren en sudoku’s

Korte historie

- New York, 1979: Dell Puzzle Magazines: ‘Number place puzzle’ (Garns)
- Japan, 1984: Monthly Nikolist: ‘Sudoku’ (Japans voor ‘uniek cijfer’)
- Nieuw Zeeland, 2003: Wayne Gould: Sudoku generator op het web
- Groot Brittanië, 2004: Sudoku’s in de kranten
- Nederland, 2005: Sudoku’s in Spits en Metro
- Sept 2005: i-mode Sudoku Game (Mobile Excellence)
- Nederland, 2006: Sudoku’s overal en voor iedereen

Lang geleden

- Zwitserland, 1783:
  Euler (grootste wiskundige aller tijden):
  Latijnse vierkanten

Oplosmethoden

- Scannen
- Matchen
- (Gokken)

Demo
(http://www.open.ou.nl/evv/Sudoku/SudokuApplet.html)
met dank aan Niké van Vugt

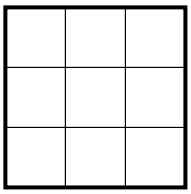
Wiskunde en sudoku’s

Vragen:

- Hoeveel sudoku’s zijn er?
- Wat voor varianten zijn er?
- Hoe bewijs je dat er maar één oplossing is?
- Is er een minimum/maximum aan het aantal startcijfers?
- Is dit probleem gelijk aan een ander probleem?

Hoeveel sudoku’s zijn er? (Latijnse vierkanten)

- Eerst klein proberen:
  - Hoeveel verschillende invullingen (met drie keer de cijfers 1, 2 en 3) zijn er voor:



- 3! * 2 = 12

Hoeveel sudoku’s zijn er?

- Klein beetje groter proberen:
  - Hoeveel verschillende invullingen zijn er voor:

Hoeveel sudoku’s zijn er?

- Bovenste rij: 4!
- Tweede rij:
- 9 stuks

1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	3	1	2	4
1	2	4	3	3	1	4	2
1	3	2	4	3	2	1	4
1	3	4	2	3	2	4	1
1	4	2	3	3	4	1	2
1	4	3	2	3	4	2	1
2	1	3	4	4	1	2	3
2	1	4	3	4	1	3	2
2	3	1	4	4	2	1	3
2	3	4	1	4	2	3	1
2	4	1	3	4	3	1	2
2	4	3	1	4	3	2	1

Hoeveel sudoku's zijn er?

- Formule voor aantal mogelijkheden in de tweede rij:

$$4! - \binom{4}{1} \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2! - \binom{4}{3} \cdot 1! + \binom{4}{4} \cdot 0! = 9$$

Hoeveel sudoku's zijn er?

- Hoeveel mogelijkheden voor de derde rij: 2
- Aantal Latijnse vierkanten van orde 4:

  4! * 9 * 2 = 432

Hoeveel sudoku's zijn er?

- Hoeveel echte Sudoku's zijn er?
  - Invulling eerste vak: 9!
  - Invulling tweede en derde vak:

$$2\cdot(3!)^6 + 18\cdot 3\cdot(3!)^6 = 56\cdot(3!)^6 = 2612736$$

  - Totaal aantal (Felgenhauer):

$$6670903752021072936960 \approx 6.671\cdot 10^{21}$$

Varianten

- Latijnse vierkanten (en rechthoeken)
  (= Sudoku zonder vak-beperking)

Stelling:

Elke Latijnse rechthoek kan worden uitgebreid tot een Latijns vierkant

Varianten

- Magisch vierkant
  - Allemaal verschillende cijfers in vierkant
  - Som van iedere rij/kolom/diagonaal gelijk
- Oplossing van orde 3 Magisch vierkant:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Lo Shu, 2800 v. Chr.

Albrecht Dürer
Melencolia I
Gravure, 1514

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Varianten

- Multi magisch vierkant
  - Allemaal verschillende cijfers in vierkant
  - Som van iedere rij/kolom/diagonaal gelijk
  - Som van n-de machten van getallen in iedere rij/kolom/diagonaal gelijk
- 1889: MMV macht 2 (orde 9)
- 2003: MMV macht 6
- 2005: Derksen, Eggermont, van den Essen: algemene methoden voor willekeurige machten en tevens voor (hyper)kubussen!

Programmeren en sudoku's

- Oplosprogramma's
  - Brute force / back tracking demo (http://home.versatel.nl/tristandc/sudoku/) met dank aan Hans van de Meerendonk
  - Logische regels (Donald Knuth: "Dancing links algorithm")
- Aspecten bij het programmeren:
  - Representatie van toestanden
  - Implementatie van regels
  - Stopcriteria, complexiteit

Logische regels

- Match (2a): komen er precies twee kandidaten voor in twee cellen dan kunnen die kandidaten worden verwijderd uit de overige cellen in die rij/kolom/vak
- Match (2b): komen er twee kandidaten voor in twee cellen die in de overige cellen in die rij/kolom/vak niet voorkomen, dan kunnen de overige kandidaten worden verwijderd uit die cellen

Logische regels

- Submatch: als er in de overlap tussen een vak en een rij of kolom kandidaten voorkomen die niet in de rest van het vak (kolom/rij) voorkomen, dan kunnen ze verwijderd worden uit de rest van de kolom/rij (het vak)

Programmeren en sudoku's

- Genereren van nieuwe puzzels demo (http://www.websudoku.com/)
- Bepalen van moeilijkheidsgraad

Wat is het nut?

- Sudoku-puzzels vragen om computer-programma's
- Goede sudoku-programma's vereisen slim programmeren
- Het is gewoon leuk om sudoku-programma's te maken en je leert er een heleboel van

Wat is het nut?

- Sudoku-puzzels roepen allerlei wiskundige vragen op
- De gebruikte wiskunde valt onder (combinatoriek) en getaltheorie
- Getaltheorie …
  - ‘Koningin der wetenschap’
  - Stelling van Euler basis voor het belangrijkste cryptografiesysteem uit de 20-ste eeuw!

Referenties

- Deze presentatie: http://www.ou.nl/eCache/DEF/14/854.html
- www.wikipedia.nl
- www.websudoku.com